Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 3

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 12.11, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (2+2+6 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Eine Hyperebene ist ein affiner Unterraum $H \subseteq \mathbb{K}^n$. Mit $\dim H = n-1$. Zeigen Sie, dass jede Hyperebene die folgende Beschreibung durch Gleichungen hat:

$$H = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0\} \text{ mit } (a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

(ii) Seien $H = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0\}, H' = \{a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 + b' = 0\} \subseteq \mathbb{K}^3$. Zeigen Sie, dass die Ebene parallel sind, genau dann, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = 1$$

(iii) Wenn die zwei Ebene von Punkt (ii) nicht parallel sind, zeigen Sie, dass $L = H \cap H' \subseteq \mathbb{K}^3$ eine Gerade ist, mit assoziierter Untervektorraum

$$L_0 = \{(tp_{23}, -tp_{13}, tp_{12}) \,|\, t \in \mathbb{K}\}$$

wobei

$$p_{12} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix}, \; p_{13} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1' & a_3' \end{pmatrix}, \; p_{23} = \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (2+8 Punkte)

(i) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $L \subseteq \mathbb{K}^3$ eine Gerade und sei $P \in \mathbb{K}^3, P \notin L$. Zeigen Sie dass eine einzige Ebene $H \subseteq \mathbb{K}^3$ existiert, so dass $P \in H, L \subseteq H$.

(ii) Sei $L = \{(2t+2, -t+1, 7t+1) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und sei $P = (1, 0, -1)$. Zeigen Sie, dass eine einzige Ebene $H \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, so dass H beide L und P enthält. Geben Sie eine Beschreibung von H durch Gleichungen und eine durch eine Parametrisierung.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Seien $L \subseteq \mathbb{K}^3$ eine Gerade und $H \subseteq \mathbb{K}^3$ eine Ebene, mit Gleichungen

$$L = \begin{Bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{Bmatrix}, \quad H = \{ax + by + cz + d = 0\}$$

Zeigen Sie, dass $L \subseteq H$, genau dann, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \leq 2$$

(ii) Wir betrachten zwei Geraden in $\mathbb{K}^3$

$$L = \begin{Bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{Bmatrix}, \quad L' = \begin{Bmatrix} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

Die zwei Geraden sind koplanar falls eine Ebene $H \subseteq \mathbb{K}^3$ existiert, so dass $L, L' \subseteq H$. Zeigen Sie, dass L, L' koplanar sind, genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

(i) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Seien $M_1, \ldots, M_r \subseteq \mathbb{K}^n$ affine Unterräume. Zeigen Sie, dass

$$\dim L(M_1, \ldots, M_r) \leq r - 1 + \sum_{i=1}^{r} \dim M_i$$

(ii) Geben Sie ein Beispiel von Geraden $M_1, M_2, M_3 \subseteq \mathbb{K}^5$ mit $\dim L(M_1, M_2, M_3) = 4$.
